Esercizi di Analisi Matematica I

(corso tenuto dal Prof. Alessandro Fonda)

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2012/2013

1 Principio di induzione

1. Dimostrare che per ogni numero naturale $n \geq 1$ vale la formula
$$\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+...+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\,.$$

2. Dimostrare che, per ogni intero $N \geq 1$, si ha
$$\sum_{k=1}^{N}(3k(k-1)+1)=N^3.$$

3. Dimostrare la seguente uguaglianza:
$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1\,.$$

4. Dimostrare che, per ogni numero naturale $n \geq 4$, si ha:
$$\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n-3}{4(n+1)}\,.$$

5. Dimostrare che, per ogni numero naturale $n \geq 1$, si ha
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(n+3)}{4\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\,.$$

6. Sia data la successione (di Fibonacci) così definita: $a_0=0$, $a_1=1$ e, per $n \geq 2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. Si dimostri per induzione che, per ogni $n \geq 3$, si ha
$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-2}a_k\,.$$

7. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$, il numero $3^{2^n}-1$ è un multiplo di 2^{n+2}.

8. Dimostrare che, per ogni numero naturale $N \geq 1$, vale la seguente uguaglianza:
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{2k^3 - 2k + 1}{k(k+1)} = \frac{N^3}{N+1} \, .$$

9. Dimostrare che, per ogni numero naturale $n \geq 1$ e per ogni numero reale $\alpha \neq 1$, vale la seguente uguaglianza:
$$\sum_{k=1}^{n} k\alpha^{k-1} = \frac{1 - (n+1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2} \, .$$

10. Dimostrare che, per ogni numero naturale n, vale la seguente uguaglianza:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+2} \, .$$

11. Dimostrare che vale la seguente formula:
$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \, .$$

12. Si dimostri la seguente formula, valida per ogni $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)(2n+5)} \, .$$

2 Numeri reali

1. Dimostrare che, presi tre numeri reali positivi a, b, c, con $a \neq 1$, si ha sempre
$$b^{\log_a c} = c^{\log_a b}.$$

2. Dato $a > 1$, dimostrare che l'insieme
$$E = \{a^x : x \in \mathbb{Q}\} \cup \{-a^x : x \in \mathbb{Q}\} \, ,$$
dove $\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei numeri razionali, è denso in $\mathbb{R}$.

3. Dimostrare che, se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e invertibile, allora l'insieme
$$\varphi(\mathbb{Q}) = \{\varphi(x) : x \in \mathbb{Q}\} \, ,$$
immagine dei numeri razionali, è denso in $\mathbb{R}$: comunque presi due numeri reali $\alpha < \beta$, esiste un elemento y di $\varphi(\mathbb{Q})$ tale che $\alpha < y < \beta$.

4. Dimostrare che l'insieme
$$\{x^2 : x \in \mathbb{Q}\} \cup \{-x^2 : x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}$$
è denso in $\mathbb{R}$.

3 Spazi metrici

1. Nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$, munito della usuale distanza euclidea, si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\,,\ y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}\}\ ,$$

dove $\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei numeri razionali. Si trovino l'interno, la chiusura e la frontiera di A, e i punti di accumulazione di A in $\mathbb{R}^2$.

2. Siano E ed E' due spazi metrici, e $f : E \to E'$ una funzione continua. Preso un aperto A di E e un aperto A' di E', stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false, giustificando le risposte.

a) L'insieme $f(A)$ è aperto.

b) L'insieme $f^{-1}(A')$ è aperto.

(Ricordiamo che $f(A) = \{f(x) : x \in E\}$, $f^{-1}(A') = \{x \in E : f(x) \in A'\}$.)

3. Dato $a > 0$, dimostrare che l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x = a^y\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^2$.

4. Consideriamo, nel piano $\mathbb{R}^2$ dotato della distanza euclidea, il sottoinsieme A definito come segue:

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}.$$

Determinarne gli eventuali punti interni, aderenti, di accumulazione, e stabilire se A è un insieme aperto e se è un insieme chiuso.

5. Sia A l'insieme unione, per $k \geq 1$, degli

$$A_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 + (-1)^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right\}\ .$$

Determinare i punti interni, aderenti, isolati, di accumulazione di A.

6. Si consideri, nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$, il sottoinsieme

$$A = \{(-2, 4)\} \cup \{(x, y) : y = 2|x|\,,\ -1 < x \leq 2\}\ .$$

Se ne determinino gli eventuali punti interni, punti aderenti e punti di accumulazione.

7. Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dimostri che il suo grafico

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

è un insieme chiuso.

8. Considerato lo spazio metrico $\mathbb{R}^2$ dotato della distanza euclidea, sia A il sottoinsieme costituito da tutti i punti (x, y) per cui esiste un numero naturale n tale che

$$\max\{|x|, |y|\} = \frac{2n}{n+1} .$$

L'insieme A risulta così contenere l'origine e i lati perimetrali di un'infinità di quadrati concentrici. Trovare i punti interni, aderenti, di accumulazione di A.

9. Nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$ dotato della distanza euclidea, si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\} .$$

Si determinino l'interno, la chiusura e la frontiera di A.

10. Nello spazio metrico $\mathbb{R}^3$, dotato della usuale distanza euclidea, si consideri l'insieme

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in \mathbb{Q}\}$$

(in altri termini, $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, dove $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali). Determinare l'interno e la chiusura di A, giustificando le affermazioni.

11. Consideriamo lo spazio metrico $\mathbb{R}^2$, dotato della distanza euclidea. A parte lo spazio stesso e l'insieme vuoto, ci possono essere delgi altri insiemi che siano contemporaneamente aperti e chiusi?

12. Dimostrare che, se E_1 ed E_2 sono insiemi densi in $\mathbb{R}$, allora $E_1 \times E_2$ è denso in $\mathbb{R}^2$.

13. Dato un intervallo $I = [a, b]$ di $\mathbb{R}$, sia E l'insieme costituito da tutte le funzioni continue definite su I a valori in $\mathbb{R}$:

$$f \in E \quad \Leftrightarrow \quad f : I \to \mathbb{R} \text{ è continua} .$$

Presi due elementi f, g di E, sia

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\} .$$

Si dimostri che tale d è una distanza su E, che risulta pertanto uno spazio metrico.

4 Limiti

1. Dimostrare che, per ogni fissato $x > 0$, la successione $(\log_n x)_n$ converge.

2. Sia $(a_n)_n$ la successione di numeri reali così definita:

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}\,.$$

   Dimostrare che la successione converge e trovarne il limite.

3. Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali tale che esistano i limiti

$$\alpha = \lim_n |a_n + 1|\,, \quad \beta = \lim_n |a_n - 1|,$$

   e $\max\{\alpha, \beta\} \leq 1$. Dimostrare che in tal caso deve essere

$$\lim_n a_n = 0.$$

4. Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ una successione convergente, con limite $\ell \in \mathbb{R}$. Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k+n}\right) = \ell\,.$$

5. Sia $(a_n)_n$ la successione così definita:

$$a_0 = 1\,, \quad a_{n+1} = \begin{cases} 1 + a_n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1 - a_n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

   Dire se tale successione è limitata, e se ha limite.

6. Essendo l'insieme dei numeri razionali compresi tra 0 e 1 numerabile, possiamo scrivere

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}\,.$$

   Dimostrare che la successione $(r_n)_n$ non può avere limite.

7. Sia $(a_n)_n$ la successione di numeri reali così definita:

$$\begin{cases} a_0 = 0\,, \\ a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^{-n}\,. \end{cases}$$

   Dimostrare che tale successione ha limite e determinarne il valore.

8. Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che
$$\sin x - \frac{1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \sin x + \frac{2x^2+3}{1+x^2},$$
per ogni $x > 0$. Dimostrare che si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

9. Si determini, se esiste, il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^4(x+y^4)^{-2}.$$

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: se, per un numero naturale $n \geq 1$, si ha che
$$\frac{1}{n+1} \leq x^2 + y^2 < \frac{1}{n},$$
allora
$$f(x,y) = \frac{(-1)^n n}{1+n}.$$
Dimostrare che non esiste il limite di $f(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$.

11. Dire se esiste il limite seguente:
$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{xy+2}{y+1}.$$

12. Dire se esiste il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{|x-2|+|y-1|}{x^2+y^2-5}.$$

13. Dire se esiste il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^2-x^2-1}{y-1}.$$

14. Stabilire se esiste il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(\sqrt{3},1)} \frac{y-1}{x^2-2y^2-1}.$$

15. Dire se esiste il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{x^2+x-y}{x^2-y^2-1}.$$

5 Proprietà di funzioni continue

1. Essendo l'insieme dei numeri razionali numerabile, possiamo scriverlo come $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{se } x = r_n \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Determinare gli eventuali punti in cui tale funzione è continua.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente (in senso debole) tale che la sua immagine $f(\mathbb{R})$ risulti un intervallo. Dimostrare che f è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$
Dimostrare che f ha almeno un punto di minimo.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \lim_{x\to-\infty} xf(x) = +\infty\,.$$
Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_0) = 0$.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni reali tali che
$$\lim_n a_n = \lim_n b_n = +\infty$$
e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$$f(a_n) < 0 < f(b_n)\,.$$
Dimostrare che esistono infiniti punti in cui la funzione f si annulla.

6. Sia $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\lim_{x\to-1^+} h(x) = \lim_{x\to1^-} h(x) = -\infty\,.$$
Dimostrare che h ha almeno un punto di massimo in $]-1, 1[$.

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \cos(x)) = \frac{1}{2}\,.$$
Dimostrare che $f(x)$ si annulla infinite volte.

6 Studio di funzioni

1. Studiare la funzione di variabile reale
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}\,.$$

2. Studiare la funzione
$$h(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}\,.$$

3. Studiare la seguente funzione:
$$f(x) = \arctan(\tan x) - \tan(\arctan x).$$

4. Studiare le seguenti funzioni:
$$f_1(x) = \sqrt{\ln(1-x^2)}\,, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\,.$$

5. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{(x^2+\pi^2)(1-\sqrt{\sin x - 1}\,)}{(x^2-\pi^2)(1+\sqrt{\cos x + 1}\,)}\,.$$

6. Studiare la funzione
$$g(x) = \arctan(\tan(2\sin x))\,.$$

7. Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4|x-1|}\,.$$

8. Studiare la funzione, di variabile x reale, definita da
$$g(x) = \arcsin|\ln x|\,.$$

9. Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) = \arccos(\cos x)\,.$$

10. Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{\arctan x}{2}\right)}\,.$$

11. Studiare la funzione
$$h(x) = \frac{x^2 - 2|x^2 - 1|}{x^2 - 4}\,.$$

12. Studiare le seguenti funzioni:
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x + |\sin x|\,, \\ f_2(x) &= \sin x + \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}\,, \\ f_3(x) &= \sin x + |\sin x - 1| - 1\,. \end{aligned}$$

13. Studiare le seguenti espressioni:
$$\arcsin(\sin x - 2)\,, \qquad \frac{x^2}{e^x - 1}\,, \qquad \ln(\arccos x - 4)\,.$$

14. Studiare la funzione
$$g(x) = \Big|\big||x - 3| - 2\big| - 1\Big|\,.$$

15. Studiare la funzione
$$f(x) = \Big|\big||x + 1| + 2\big| + 3\Big|\,.$$

7 Calcolo differenziale

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet definita da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$
Determinare se la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(x) = (x + 1)^2 (f(x) + 1)$$
è derivabile in qualche punto.

2. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili due volte. Si scriva la formula per la derivata seconda di $f \circ g$ e di $g \circ f$.

3. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che
$$\begin{aligned} &f(1) = 2\,, \quad f(2) = 1\,, \quad g(1) = 2\,, \quad g(2) = 1\,, \\ &f'(1) = 1\,, \quad f'(2) = 2\,, \quad g'(1) = 2\,, \quad g'(2) = 1\,. \end{aligned}$$
Calcolare le seguenti derivate:
$$\begin{aligned} &(g \circ f)'(1)\,, \quad (f \circ g)'(1)\,, \quad (f \circ f)'(1)\,, \quad (g \circ g)'(1)\,, \\ &(g \circ f)'(2)\,, \quad (f \circ g)'(2)\,, \quad (f \circ f)'(2)\,, \quad (g \circ g)'(2)\,. \end{aligned}$$

4. Si trovi un esempio di una funzione derivabile $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty\,,$$

e per la quale esiste una successione di numeri reali $(x_n)_n$ per cui

$$\lim_n x_n = +\infty\,, \quad \lim_n h'(x_n) = -\infty\,.$$

5. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che, comunque presi due punti x_0 e x in $\mathbb{R}$, si abbia

$$g(x) \geq g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Dimostrare che, in tal caso, g è convessa.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si stabilisca in quali punti essa è continua o derivabile. Si consideri poi la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

e si trovino anche per questa i punti in cui essa è continua o derivabile.

7. Trovare un esempio di una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile due volte, tale che

$$h''(0) > 0\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h''(x) \geq -1\,,$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty\,.$$

8. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che $g'(0) = 1$ e

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad g''(x) \geq 1 + \sin x\,.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty\,.$$

9. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^\alpha & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
è derivabile.

10. Sia $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che, per ogni $\delta > 0$, si abbia
$$\inf\{h(x) : x \in]0, \delta[\,\} < 0 < \sup\{h(x) : x \in]0, \delta[\,\}\,.$$
Dimostrare che la derivata di h si annulla infinite volte.

11. Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione
$$f(x) = \alpha x^2 + (x^3 + 3x)\arctan(x) - \ln(1 + x^2)$$
risulti convessa.

12. Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\,,$$
e la cui derivata non abbia massimo.

13. Dimostrare che una funzione continua $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ tale che
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$
non può essere convessa.

14. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che
$$f(-1) + f(1) = 2f(0).$$
Dimostrare che esiste un punto ξ in cui $f''(\xi) = 0$.

15. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte con derivata seconda continua tale che
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$
Dimostrare che esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.

16. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.

17. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile tale che $f(0) > 0$. Dimostrare che esiste almeno una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^2$ che non interseca il grafico di f.

18. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$f'(0) = 1$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Dimostrare che esistono almeno due punti in cui la derivata di f vale $\frac{1}{2}$.

19. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

allora f è costante.

20. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ .$$

Dimostrare che in tal caso si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ .$$

21. Dimostrare che non esiste alcuna funzione convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \sin x) = 0\ .$$

22. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi.$$

Dimostrare che esiste almeno un punto in cui la derivata si annulla.

23. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - \cos x & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Possiamo affermare che f è derivabile in 0? Giustificare la risposta.

24. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa e derivabile tale che $f(0) = f'(0) = 0$. Dimostrare che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ .$$

25. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, con derivata seconda continua, tale che

$$g(0) = g'(0) = 0$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

Dimostrare che esiste un $\xi > 0$ tale che $g''(\xi) = 0$.

26. Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile avente le seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} a) & \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty; \\ b) & f(e) = \pi; \\ c) & \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0. \end{array}$$

Dimostrare che esiste almeno un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 1$.

27. Dimostrare che una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0 \ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1 \ ,$$

non può essere convessa.

28. Esiste una funzione convessa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g'(0) = 0$ e

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \quad ?$$

29. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si abbia

$$|f''(x) - \sin x| \leq 1 \ .$$

Dimostrare che la funzione

$$g(x) = f(x) + x^2$$

è convessa.

30. Sia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1) &= 1, \\ f(2) &= -1, \\ f(3) &= 0. \end{aligned}$$

Dimostrare che esiste un punto $\xi \in]0,3[$ tale che $f''(\xi) = 0$.

31. Dimostrare che non esiste alcuna funzione convessa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) + \sqrt{|x|}\,) = 0\,.$$

32. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 1.$$

Sapendo che $f'(0) = 1$, dimostrare che esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.

33. Dimostrare che non esiste una funzione strettamente convessa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si abbia $g(x) \leq 0$.

34. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(0) = -1$ e

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0\,.$$

Dimostrare che f non può essere convessa.

35. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \ln x) = 1\,.$$

Si dimostri che tale funzione non può essere convessa.

36. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x \to -\infty} (h(x) + x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} (h(x) + 2x) = 0\,.$$

Si dimostri che h non può essere convessa.

37. Sia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tre volte tale che

$$f(-2) = f(2) = 0,$$
$$f(-1) = f(1) = -1,$$
$$f(0) = 1.$$

Dimostrare che esiste un $\xi \in]-2,2[$ per cui $f'''(\xi) = 0$.

38. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + x^2| \leq 100\,.$$

Si dimostri che tale funzione non può essere convessa.

39. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$f(3) = 3f(1) - 2f(0)\,.$$

Dimostrare che esiste un punto in cui la derivata seconda si annulla.

40. Dimostrare che non esiste alcuna funzione convessa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ e

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |h(x)| \leq 10\,.$$

41. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Dimostrare che la funzione non può avere né massimi né minimi locali.

42. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, tale che

$$g(-1) < 0\,, \qquad g(1) > 0\,,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\,.$$

Dimostrare che ci sono almeno tre punti in cui la derivata seconda si annulla.

43. Dimostrare che le funzioni $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sono al tempo stesso convesse e concave sono quelle del tipo

$$h(x) = mx + q\,,$$

con $m, q \in \mathbb{R}$.

44. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che
$$f(-1) = -1\,, \qquad f(1) = 1\,.$$
Dimostrare che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$
Supponendo ora f derivabile due volte, dire se esistono anche i limiti
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f''(x)\,,$$
motivando le risposte.

45. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente concava. Dimostrare che i loro grafici possono avere al più due punti in comune.

8 Ancora sui limiti

1. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to3} (4-x)^{\tan(\frac{\pi x}{6})}.$$

3. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{x\to1} \left[\tan\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\ln x\right].$$

4. Calcolare il valore del seguente limite:
$$\lim_{x\to0} \frac{1-e^{-\sinh(x)}}{1+x-\cosh(x)}\,.$$

5. Dire quali dei seguenti limiti non esiste:
$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}\,, \qquad \lim_{x\to0} \frac{|\sin x|}{x}\,,$$
$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{|x|}\,, \qquad \lim_{x\to0} \frac{|\sin x|}{|x|}\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,.$$

6. Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet così definita:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

   Dire se per qualche $a > 0$ esiste il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{\phi(x)+x} - 1}{\phi(x) + x}\,.$$

7. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{\tan(\ln(3x+1))}\,.$$

8. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{\ln(\cos x)}\,.$$

9. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 - \sin^2 x + 1)}{e^{x^2} - 1 - x^2}\,.$$

10. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\arcsin(1-x)}{\arcsin(\sqrt{x}\,)}\,.$$

11. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(e^x + \sin x)}\,.$$

12. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{e^x - e^y + y - x}{x^2 + y^2}\right)\,, \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^y + y - x}{x^2 + y^2}\right)\,.$$

13. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right)\,, \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right)\,.$$

14. Dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} - 1 - xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0\,.$$

15. Dire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2)(e^y-1)}{\sin(x^4)+\ln(y^2+1)} .$$

16. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^3)}{x^2+y^6} .$$

17. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{\sin(x+y+1)}{1+3\ln(x+y+2)-e^{x+y+1}} .$$

18. Stabilire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\arctan(x^4)}{y^2+\sin(x^8)} .$$

9 Formula di Taylor

1. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 nel punto $x_0=-1$ associato alla funzione

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right) .$$

2. Usando la formula di Taylor, dimostrare che per ogni $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ si ha:

$$\sin x \le x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120} .$$

3. Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\ge 0 \,, \\ x^3-2\cos x+2 & \text{se } x<0 \,. \end{cases}$$

Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $x_0=0$ e studiare il comportamento del resto nella relativa formula di Taylor, commentando il risultato.

4. Usando la formula di Taylor, dimostrare che in un intorno dello zero vale la seguente disuguaglianza:

$$\cosh(x)\le 12\,\frac{x^2+2}{24-x^4} .$$

5. Usando la formula di Taylor, si dimostri che, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione due volte derivabile tale che $f(0) = f(1)$, esiste un $x \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$f''(x) = -2f'(0)\,.$$

6. Scrivere i polinomi di Taylor di grado 3 nei punti 0 e -1 per la funzione

$$g(x) = e^{-x^2}\,.$$

7. Dimostrare che, in un intorno dell'origine, vale la seguente disuguaglianza:

$$\cos(x) \geq \frac{24 - 12x^2}{24 - x^4}\,.$$

Trovare l'intorno massimale del tipo $\,]-\rho\,,\,\rho[\,$ su cui vale tale proprietà.

8. Trovare un valore approssimato di $\sin(\frac{1}{10})$ con un errore inferiore a 10^{-10} facendo uso della formula di Taylor con resto di Lagrange.

9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte con derivata quarta continua tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0\;, \quad f''''(x_0) = 1\;.$$

Dimostrare, usando la formula di Taylor, che x_0 è un punto di minimo locale.