Complementi per il corso di Analisi 1

Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2016/2017

1 La funzione esponenziale

Abbiamo visto a lezione il seguente enunciato.

Teorema. *Dato $a > 0$, esiste un'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ tale che, per ogni x_1, x_2,*
(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$,
(ii) $f(1) = a$.
Se inoltre $a \neq 1$, tale funzione è invertibile.

Ci proponiamo ora di costruire una tale funzione. Se $a = 1$, la costruzione è immediata: basta prendere la funzione costante $f(x) = 1$. Supporremo quindi $a \neq 1$.

1.1 La costruzione - primo passo

Innanzitutto, viene fissato un numero reale $a > 0$, che sarà la "base" della funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ che vogliamo costruire. Iniziamo definendola sull'insieme

$$F = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

che è denso in $\mathbb{R}$. Nel caso in cui $m = 1$ e $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire

$$f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\,,$$

per induzione. Se $n = 0$, poniamo $f(1) = a$. Supponendo di averla definita per un certo $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$f\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) = \sqrt{f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)}\,.$$

Si noti l'uguaglianza

$$\Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{2^n} = a\,,$$

verificabile per induzione. Poniamo ora

$$f\Big(\frac{m}{2^n}\Big) = \Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^m,$$

con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che è una buona definizione. Siano m, n e m', n' tali che $\dfrac{m}{2^n} = \dfrac{m'}{2^{n'}}$: se, per esempio, $n' \geq n$, si vede che

$$f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = f\Big(\frac{1}{2^{n'}}\Big)^{2^{n'-n}},$$

e perciò

$$f\Big(\frac{m}{2^n}\Big) = f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)^m = \Big(f\Big(\frac{1}{2^{n'}}\Big)^{2^{n'-n}}\Big)^m = f\Big(\frac{1}{2^{n'}}\Big)^{m2^{n'-n}} = f\Big(\frac{1}{2^{n'}}\Big)^{m'} = f\Big(\frac{m'}{2^{n'}}\Big).$$

Quindi, f è ben definita su F, a valori positivi. Ne evidenzieremo alcune proprietà.

Proprietà 1. Si ha

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2), \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in F.$$

Infatti, dati $x_1 = \dfrac{m}{2^n}$ e $x_2 = \dfrac{m'}{2^n}$ (li possiamo prendere con lo stesso denominatore), si ha

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{m}{2^n} + \frac{m'}{2^n}\Big) &= f\Big(\frac{m+m'}{2^n}\Big) = \Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{m+m'} \\ &= \Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^m \Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{m'} = f\Big(\frac{m}{2^n}\Big) f\Big(\frac{m'}{2^n}\Big). \end{aligned}$$

Proprietà 2. Se $a > 1$, allora f è strettamente crescente.

In questo caso, infatti, si ha che $f(x) > 1$ per ogni $x \in F$ positivo. Ne segue che

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1)f(x_2 - x_1) > f(x_1).$$

In modo analogo si vede che, se $a < 1$, allora f è strettamente decrescente.

Proprietà 3. La funzione $f : F \to]0, +\infty[$ è continua. Più precisamente:

per ogni $N \geq 1$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che,
presi $x_1, x_2 \in F \cap [-N, N]$, $\quad d(x_1, x_2) \leq \delta \ \Rightarrow \ d(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$.

Per dimostrare questa affermazione, supponiamo $a > 1$ e vediamo dapprima che è

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Fissiamo un $\epsilon > 0$; sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq (a-1)/\epsilon$. Allora, per ogni $n \geq \bar{n}$,

$$\Big(f\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big)^{2^n} = a \leq 1 + n\epsilon \leq 1 + 2^n\epsilon \leq (1+\epsilon)^{2^n},$$

per cui

$$1 < f\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \leq 1 + \epsilon.$$

Ne segue l'affermazione, essendo f crescente.

Dimostriamo ora la Proprietà 3, sempre per $a > 1$. Fissiamo un intero $N \geq 1$ e un $\varepsilon > 0$. Per quanto visto sopra, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad 1 < f(x) < 1 + \frac{\varepsilon}{f(N)} .$$

Allora, presi $x_1, x_2 \in F \cap [-N, N]$ tali che $x_1 < x_2$ e $x_2 - x_1 \leq \delta$, si ha

$$0 < f(x_2) - f(x_1) = f(x_1)(f(x_2 - x_1) - 1) < f(N) \frac{\varepsilon}{f(N)} = \varepsilon .$$

Se $a < 1$, la dimostrazione è analoga.

1.2 Funzioni uniformemente continue

Siano E ed E' due spazi metrici qualunque. Una funzione $f : E \to E'$ si dice *uniformemente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon .$$

Enunciamo un importante teorema di estensione.

Teorema. *Sia F un sottoinsieme denso in E, e sia E' completo. Se $f : F \to E'$ è uniformemente continua, allora esiste un unica funzione continua $\tilde{f} : E \to E'$ la cui restrizione a F coincide con f.*

Dimostrazione. Prendendo $x \in E$, esiste una successione $(x_n)_n$ in F tale che $x_n \to x$. Siccome f è uniformemente continua e $(x_n)_n$ è una successione di Cauchy, si vede che anche $(f(x_n))_n$ è di Cauchy. Essendo E' completo, esiste un $y \in E'$ tale che $f(x_n) \to y$. Definiamo $\tilde{f}(x) = y$.

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Se $(\tilde{x}_n)_n$ è un'altra successione in F tale che $\tilde{x}_n \to x$, allora $d(x_n, \tilde{x}_n) \to 0$, e siccome f è uniformemente continua, si ha che $d(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \to 0$. Ne segue che $(f(\tilde{x}_n))_n$ ha lo stesso limite di $(f(x_n))_n$, e la definizione di $\tilde{f}$ è consistente.

Chiaramente, la funzione $\tilde{f}$ così definita estende f, siccome, se $x \in U$, possiamo prendere la successione $(x_n)_n$ costantemente uguale a x. Dimostriamo che $\tilde{f}$ è (uniformemente) continua. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che, prendendo $u, v \in F$,

$$d(u, v) \leq 2\delta \quad \Rightarrow \quad d(f(u), f(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Se x, y sono due punti in E tali che $d(x, y) \leq \delta$, possiamo prendere due successioni $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ in F tali che $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Allora, per n sufficientemente grande,

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\leq d(\tilde{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(f(y_n), \tilde{f}(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon , \end{aligned}$$

il che dimostra che $\tilde{f}$ è uniformemente continua.

Per concludere, sia $\hat{f} : E \to E'$ una qualsiasi funzione continua che estende f. Allora, per ogni $x \in E$, prendendo una successione $(x_n)_n$ in F tale che $x_n \to x$,

$$\hat{f}(x) = \lim_n \hat{f}(x_n) = \lim_n f(x_n) = \tilde{f}(x)\,.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\tilde{f}$ è l'unica possibile estensione continua di f a E. ■

1.3 Secondo passo: estensione a tutto $\mathbb{R}$

Supponiamo $a > 1$ e modifichiamo la funzione $f : F \to]0, +\infty[$ definendo, per ogni intero $N \geq 1$, la funzione $f_N : F \cap [-N, N] \to [f(-N), f(N)]$, tale che $f_N(x) = f(x)$ per ogni $x \in F \cap [-N, N]$. L'insieme $F \cap [-N, N]$ è denso in $[-N, N]$ e, per la Proprietà 3, la funzione f_N è uniformemente continua. Inoltre, ha valori in un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, pertanto in uno spazio metrico completo. Essa si può pertanto estendere, in un unico modo, a una funzione continua $\tilde{f}_N : [-N, N] \to [f(-N), f(N)]$.

Possiamo allora definire $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ in questo modo: dato $x \in \mathbb{R}$, si prende un intero N per cui $x \in [-N, N]$ e si pone $f(x) = \tilde{f}_N(x)$. Per l'unicità delle estensioni, questa risulta essere una buona definizione, ed è una funzione continua.

La Proprietà 1 (di omomorfismo) continua a essere soddisfatta. Infatti, presi due numeri reali x_1, x_2, posso scegliere un intero $N \geq 1$ tale che x_1, x_2 e $x_1 + x_2$ stanno in $[-N, N]$. Prendendo due successioni[1] $(x_1^n)_n$ e $(x_2^n)_n$ in $F \cap [-N, N]$ tali che $\lim_n x_1^n = x_1$ e $\lim_n x_2^n = x_2$, si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \tilde{f}_N(x_1 + x_2) \\ &= \lim_n f_N(x_1^n + x_2^n) = \lim_n (f_N(x_1^n) f_N(x_2^n)) = \lim_n f_N(x_1^n) \lim_n f_N(x_2^n) \\ &= \tilde{f}_N(x_1) \tilde{f}_N(x_2) = f(x_1) f(x_2)\,. \end{aligned}$$

Dalla Proprietà 2 dedurremo ora che, se $a > 1$, anche f è strettamente crescente. Infatti, presi due numeri reali $x_1 < x_2$, posso sempre individuare un intero $N \geq 1$ e due numeri $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ in $F \cap [-N, N]$ tali che

$$-N \leq x_1 < \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < x_2 \leq N\,.$$

Essendo f_N strettamente crescente, con semplici passaggi al limite si vede che $\tilde{f}_N$ è crescente, per cui

$$f(x_1) = \tilde{f}_N(x_1) \leq \tilde{f}_N(\tilde{x}_1) = f_N(\tilde{x}_1) < f_N(\tilde{x}_2) = \tilde{f}_N(\tilde{x}_2) \leq \tilde{f}_N(x_2) = f(x_2)\,.$$

Dimostriamo ora che, se $a > 1$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

[1] Qui scriviamo gli indici in apice per non avere doppi indici in basso.

I due limiti sicuramente esistono, siccome f è crescente. Osservando che, se $m \in \mathbb{Z}$, si ha $f(m) = a^m$, e che

$$\lim_{m \to -\infty} a^m = 0\,, \qquad \lim_{m \to +\infty} a^m = +\infty\,,$$

si giunge alla conclusione. A questo punto, possiamo anche affermare che, se $a > 1$, la funzione $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biiettiva: essendo continua, l'immagine deve essere un intervallo, e da quanto sopra questo intervallo deve essere proprio $]0, +\infty[$.

Se $a < 1$, considerazioni analoghe portano a dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biiettiva e strettamente decrescente.

2 La funzione circolare

In analogia con il procedimento seguito per introdurre la funzione esponenziale, abbiamo visto a lezione il seguente enunciato.

Teorema. *Dato $T > 0$, esiste un'unica funzione $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, continua e periodica di periodo minimo T, tale che, per ogni x_1, x_2,*

(j) $h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2)\,,$

(jj) $h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i\,.$

Costruiremo ora una tale funzione, in modo del tutto simile a quello seguito per la funzione esponenziale.

2.1 La costruzione - primo passo

Definiamo la successione $(\sigma_n)_n$, con $\sigma_n = x_n + iy_n \in S^1$:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = i,$$

e, per $n \geq 3$,

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}}{2}} + i\frac{y_{n-1}}{\sqrt{2\,(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2}\,)}}\,,$$

così che $\sigma_n^2 = \sigma_{n-1}$, (vedi la formula per le radici quadrate di un numero complesso) e $0 < x_n < 1$, $0 < y_n < 1$.

Ci interessano ora le potenze di σ_n, quando $n \geq 2$. Sicuramente σ_n^m sta in S^1, per ogni n e m. Vediamo inoltre che la distanza tra una potenza e la successiva è sempre costante:

$$|\sigma_n^{m+1} - \sigma_n^m| = |\sigma_n^m|\,|\sigma_n - 1| = |\sigma_n|^m\,|\sigma_n - 1| = |\sigma_n - 1|.$$

Infine, si vede per induzione che

$$\sigma_n^{2^n} = 1\,.$$

Queste considerazioni ci permettono di interpretare geometricamente i punti σ_n^m : fissato $n \geq 2$, i punti

$$1, \sigma_n,\ \sigma_n^2,\ \dots\ , \sigma_n^{2^{n-1}}$$

sono i vertici di un poligono regolare di 2^n lati inscritto in S^1.

Vogliamo definire la funzione $h_T : \mathbb{R} \to S^1$, di periodo minimo T. Per cominciare, definiamola sull'insieme

$$\widehat{F} = \left\{ \frac{mT}{2^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\},$$

in questo modo:

$$h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) = \sigma_n^m .$$

Verifichiamo che è ben definita: siano m, n e m', n' tali che $\dfrac{mT}{2^n} = \dfrac{m'T}{2^{n'}}$; se, per esempio, $n' \geq n$, si vede che $\sigma_n = \sigma_{n'}^{2^{n'-n}}$, e perciò

$$\sigma_n^m = (\sigma_{n'}^{2^{n'-n}})^m = \sigma_{n'}^{m2^{n'-n}} = \sigma_{n'}^{m'} .$$

Quindi, h_T è ben definita su $\widehat{F}$, a valori in S^1. Ne studieremo alcune proprietà.

Proprietà 1. Si ha

$$h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2) , \quad \text{per ogni } x_1 , x_2 \in \widehat{F} .$$

Infatti, dati $x_1 = \dfrac{kT}{2^n}$ e $x_2 = \dfrac{mT}{2^n}$ (possiamo prenderli aventi lo stesso denominatore), abbiamo

$$\begin{aligned} h_T\left(\frac{kT}{2^n} + \frac{mT}{2^n}\right) &= h_T\left(\frac{(k+m)T}{2^n}\right) = \sigma_n^{k+m} \\ &= \sigma_n^k \sigma_n^m = h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) . \end{aligned}$$

Proprietà 2. La funzione h_T è periodica, di periodo T.

Infatti, essendo $h_T(T) = 1$, si ha che

$$h_T(x + T) = h_T(x)h_T(T) = h_T(x) ,$$

per ogni $x \in \widehat{F}$.

Proprietà 3. La funzione $h_T : \widehat{F} \to S^1$ è uniformemente continua. Più precisamente, per ogni x_1, x_2 in $\widehat{F}$ si ha

$$|h_T(x_2) - h_T(x_1)| \leq \frac{2\pi}{T} |x_2 - x_1| .$$

Infatti, prendiamo due elementi distinti di $\widehat{F}$, siano essi $x_1 = \dfrac{kT}{2^n}$ e $x_2 = \dfrac{mT}{2^n}$, con $k < m$. Allora

$$\begin{aligned} h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right) &= \sigma_n^m - \sigma_n^k = \sigma_n^k(\sigma_n^{m-k} - 1) \\ &= \sigma_n^k(\sigma_n - 1)(1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + ... + \sigma_n^{m-k-1}), \end{aligned}$$

e quindi, essendo $2^n|\sigma_n - 1| < 2\pi$ (visto a lezione), si ha

$$\left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T\left(\frac{kT}{2^n}\right)\right| \leq |\sigma_n - 1|(m-k) \leq \frac{2\pi}{T}\left|\frac{mT}{2^n} - \frac{kT}{2^n}\right| .$$

2.2 Secondo passo: estensione a tutto $\mathbb{R}$

È facile vedere che $\widehat{F}$ è denso in $\mathbb{R}$. D'altra parte, S^1 è chiuso in $\mathbb{R}^2$, che è completo. Quindi la funzione $h_T : \widehat{F} \to S^1$ essendo uniformemente continua, a valori in uno spazio metrico completo, può essere estesa, in un unico modo, a una funzione continua $h_T : \mathbb{R} \to S^1$.

La Proprietà 1 (di omomorfismo) si estende con semplici passaggi al limite, come visto per la funzione esponenziale. Lo stesso dicasi per la periodicità. Dimostriamo ora che T è il *periodo minimo* di h_T. Consideriamo dapprima l'insieme

$$K = \{t \in \mathbb{R} : h_T(t) = 1\} ,$$

cioè il *nucleo*, $K = \ker h_T$. È un insieme chiuso che contiene sicuramente T e tutti i suoi multipli interi. Poniamo $a = \inf\{x \in K : x > 0\}$. Deve essere $a > 0$, altrimenti K conterrebbe numeri arbitrariamente piccoli, e con questi tutti i loro multipli; ne verrebbe che K sarebbe denso in $\mathbb{R}$, e perciò coinciderebbe con esso, il che è chiaramente assurdo. Essendo K chiuso, è $a \in K$. Inoltre, a deve essere un sottomultiplo di T. Infatti, se così non fosse, potrei prendere $\bar{n}$, il più grande intero per cui $\bar{n}a < T$. Allora si avrebbe che $0 < T - \bar{n}a < a$ e $h_T(T - \bar{n}a) = 1$, ossia $T - \bar{n}a \in K$, una contraddizione con il fatto che a è il minimo elemento positivo di K.

Notiamo che $h_T(\frac{a}{2}) = -1$. Infatti,

$$h_T\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 = h_T\Big(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\Big) = h_T(a) = 1 ,$$

e $h_T(\frac{a}{2}) \neq 1$, essendo $\frac{a}{2} \notin K$.

Sia $N \geq 1$ tale che $T = Na$: dimostriamo che deve essere $N = 1$. Se per assurdo fosse $N \geq 2$, avrei che

$$\frac{a}{2} = \frac{T}{2N} \leq \frac{T}{4} .$$

Facendo vedere che nessun punto dell'intervallo $\left[0, \frac{T}{4}\right]$ può venir mandato in -1, avremo la contraddizione cercata. Cominciamo prendendo un numero di $\widehat{F} \cap \left[0, \frac{T}{4}\right]$: sia esso $\dfrac{mT}{2^n}$. Allora, per la Proprietà 1,

$$\left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - 1 \right| = \left| h_T\left(\frac{mT}{2^n}\right) - h_T(0) \right| \leq \frac{2\pi}{T}\frac{mT}{2^n} \leq \frac{\pi}{2} < 2.$$

Ne segue per continuità che nessun punto di $[0, \frac{T}{4}]$ può avere immagine in -1.

Abbiamo quindi dimostrato che $a = T$. Supponiamo per assurdo che ci sia un periodo $\tau > 0$ minore di T. Ne seguirebbe che

$$h_T(\tau) = h_T(0 + \tau) = h_T(0) = 1\,,$$

quindi $\tau \in K$, e ciò è in contraddizione con il fatto che il nucleo di h_T è costituito da tutti e soli i multipli interi di T.

Concludiamo con il seguente

Teorema. *Si ha:*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|h_T(x) - 1|}{x} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Dimostrazione. Cominciamo con il considerare il limite al variare di x in $\widehat{F}$. Sia quindi $x = \frac{mT}{2^n} > 0$. Allora,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{|h_T(x) - 1|}{x} - \frac{2\pi}{T} \right| &= \left| \frac{|\sigma_n^m - 1|}{\frac{mT}{2^n}} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&= \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} \frac{|1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_n^{m-1}|}{m} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&\leq \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} \left| \frac{|1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_n^{m-1}|}{m} - 1 \right| + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&\leq \frac{2\pi}{T} \left| \frac{1 + \sigma_n + \sigma_n^2 + \ldots + \sigma_n^{m-1}}{m} - 1 \right| + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right| \\
&\leq \frac{2\pi}{T} \frac{|\sigma_n - 1| + |\sigma_n^2 - 1| + \ldots + |\sigma_n^{m-1} - 1|}{m} + \left| \frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T} \right|\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, essendo $2^n|\sigma_n - 1| < 2\pi$ (visto a lezione), si ha

$$|\sigma_n^2 - 1| \leq |\sigma_n^2 - \sigma_n| + |\sigma_n - 1| = 2|\sigma_n - 1| \leq 2\,\frac{2\pi}{2^n}\,,$$

e così via, fino a $|\sigma_n^{m-1} - 1| \leq (m-1)\frac{2\pi}{2^n}$. Usando la formula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) = \frac{(m-1)m}{2}\,,$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{|\sigma_n - 1| + |\sigma_n^2 - 1| + \ldots + |\sigma_n^{m-1} - 1|}{m} &\le \frac{1}{m}\left[\frac{2\pi}{2^n} + 2\,\frac{2\pi}{2^n} + \ldots + (m-1)\frac{2\pi}{2^n}\right] \\
&= \frac{1}{m}\,\frac{(m-1)m}{2}\,\frac{2\pi}{2^n} = \frac{(m-1)\pi}{2^n} < \frac{\pi}{T}\,\frac{mT}{2^n}.
\end{aligned}
$$

In conclusione, se $x = \frac{mT}{2^n} > 0$, si ha:

$$
\left|\frac{|h_T(x) - 1|}{x} - \frac{2\pi}{T}\right| \le \frac{2\pi}{T}\,\frac{\pi}{T}\,\frac{mT}{2^n} + \left|\frac{2^n|\sigma_n - 1|}{T} - \frac{2\pi}{T}\right|.
$$

Al tendere di $x = \frac{mT}{2^n}$ a 0, si ha che necessariamente n tende a $+\infty$, e il risultato segue dal fatto che $2^n|\sigma_n - 1|$ tende a 2π (visto a lezione).

Consideriamo ora il limite per $x \to 0^+$ senza ulteriori restrizioni su x e, per assurdo, supponiamo che non esista o non sia uguale a 1. Allora esiste un $\varepsilon > 0$ e una successione $(x_n)_n$ tale che $x_n \to 0^+$ tale che, per ogni n,

$$
\frac{|h_T(x_n) - 1|}{t_n} \notin \left[\frac{2\pi}{T} - \varepsilon, \frac{2\pi}{T} + \varepsilon\right].
$$

Per la continuità della funzione $\frac{|h_T(x)-1|}{x}$ e la densità di $\widehat{F}$ in $\mathbb{R}$, per ogni n sufficientemente grande si può trovare un $x_n' \in \widehat{F}$ positivo in modo che

$$
|x_n - x_n'| \le \frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad \frac{|h_T(x_n') - 1|}{x_n'} \notin \left[\frac{2\pi}{T} - \varepsilon, \frac{2\pi}{T} + \varepsilon\right],
$$

in contraddizione con quanto visto nella prima parte della dimostrazione. ∎

Abbiamo definito a lezione le funzioni

$$
\cos_T t = Re(h_T(t)), \qquad \sin_T t = Im(h_T(t)),
$$

per cui

$$
h_T(t) = \cos_T t + i \sin_T t.
$$

Dal teorema sopra dimostrato si ha che

$$
\lim_{x \to 0^+} \frac{(\cos_T(x) - 1)^2 + (\sin_T(x))^2}{x^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,
$$

da cui, essendo $\cos_T$ una funzione pari,

$$
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos_T(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.
$$

Abbiamo quindi

$$
\lim_{x \to 0} \frac{(\sin_T(x))^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + \cos_T x)(1 - \cos_T x)}{x^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,
$$

e tenendo conto delle proprietà di segno di $\sin_T$, concludiamo che

$$
\lim_{x \to 0} \frac{\sin_T x}{x} = \frac{2\pi}{T}.
$$