PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 30.01.2013

1. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1 \ \text{ e } \ \frac{y}{x+1} \notin \mathbb{Q} \right\} .$$

Si determini l'interno e la chiusura di A.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x - x}{x^5} - \frac{1}{3x^2} \right) , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)\ln(1+y^2)}{\sqrt{1-\cos(x^2+y^4)}} .$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} .$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 5 associato alla funzione

$$f(x) = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

nel punto $x_0 = 1$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 20.02.2013

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, non costante, tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

Si dimostri che f non può essere convessa.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\sin^2 x)}{1-\cos(e^x-1)}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\ln(3x^2y^2+1)}\,.$$

3. Studiare le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x\,e^x}{x-1}\,, \qquad g(x) = \arccos(\cos x + 2)\,.$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 5 associato alla funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}\,,$$

nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 12.06.2013

1. Sia $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -2\,.$$

Si dimotri che esiste almeno un punto $\xi \in]0,+\infty[$ in cui $f'(\xi) = -1$.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4}{x^5}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2)\sqrt{1-\cos(y^2)}}{\tan(x^2+y^2)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,.$$

4. Scrivere la formula del polinomio di Taylor di grado 3 associato alla funzione

$$f(x) = x^3\, e^{x-1}$$

nel punto $x_0 = 1$, e la formula del corrispondente resto di Lagrange.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 02.07.2013

1. Sia $f\colon]1,2[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty\,.$$

Si dimostri che esiste almeno un punto $\xi \in]1,2[$ in cui $f'(\xi) = \pi$.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sinh(x)}{x^3}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{\ln(x^2)\tan(1+y)}{\sin(x^2+y^2-2)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{1-x^2}\,.$$

4. Scrivere la formula del polinomio di Taylor di grado 4 associato alla funzione

$$f(x) = (x+2)^3\,\ln(x)$$

nel punto $x_0 = 1$, e la formula del corrispondente resto di Lagrange.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 04.09.2013

1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x^3) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x^3) = 0\,.$$

Dimostrare che tale funzione non può essere né concava né convessa.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh^2(x)-\sin^2(x)}{x^4}\,,\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+1)\tan^2(y)}{\sinh(x^2+y^2)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = x^2(\ln|x|-1)\,.$$

4. Sia $(a_n)_n$ la successione così definita:

$$a_0 = 1\,,\qquad a_{n+1} = \lambda|a_n - 1|\,,$$

con $\lambda > 2$. Si dimostri che

$$\lim_n a_n = +\infty\,.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 18.09.2013

1. Sia $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0\,.$$

Dimostrare che esiste un $\xi \in]a,b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2(x) - \tan^2(x)}{x^4}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(x+1)\sin(y)}{\tanh(x^2+y^2)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}\,.$$

4. Sia $(a_n)_n$ la successione così definita:

$$a_0 = \alpha\,, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - 1\,,$$

Si dimostri che, se

$$\alpha > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

allora

$$\lim_n a_n = +\infty\,.$$