PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 29.01.2014

FILA A

1. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \Big\{ \big(e^\theta \cos(\theta)\,,\, e^\theta \sin(\theta)\big) : \theta \in \mathbb{R} \Big\}\,.$$

Dopo averne disegnato la forma approssimativa, si determini l'interno e la chiusura di A.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2e^{x-1} - 1 - x^2}{\sin^3(x-1)}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2)(e^y - 1)}{\ln(1 + x^4 + y^2)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = x + \frac{e^x}{e^x - 1}\,.$$

4. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado 4 e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = \cos(x)\,,$$

nel punto $x_0 = \pi$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 19.02.2014

FILA A

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa. Dimostrare che, se f ha minimo, allora c'è un unico punto di minimo.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^x - 1 - x)}{\cos(e^x - 1) - 1}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2)(1 - \cosh(y))}{\ln(1 + x^2 + y^2)}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{(e^x - 1)(e^x - 2)}.$$

4. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \exp(x^2).$$

Si dimostri per induzione che, indicando con $g^{(n)}$ la derivata n-esima di g, si ha che

$$\frac{g^{(n)}(x)}{g(x)} \quad \text{è un polinomio di grado } n.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 10.06.2014

1. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \Big\{ (x, y) : x + y \in \mathbb{Q} \Big\} .$$

Si determini l'interno e la chiusura di A.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(\tanh(x^2 - 1))}{\ln(x + 2)} \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(x^2)(\ln(1 + y) - y)}{\tan(\sinh(x^2 + y^2))} .$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^{x+1} - 1)(e^{x-1} - 1)} .$$

4. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado 4 e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = \ln(x^2) ,$$

nel punto $x_0 = \sqrt{e}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 02.07.2014

1. Si dimostri che una funzione polinomiale di grado dispari e maggiore di 2 non può essere convessa.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(|e^x - 1|)}{\ln(x+1)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^4(x)\sin^4(y)}{\sin^4(x)+\sin^4(y)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(2x) - \arctan(x)\,.$$

4. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado 2 e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = \ln(x^2+1)\,,$$

nel punto $x_0 = -\sqrt{e-1}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 11.09.2014

1. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \bigcup_{n\geq 1} \left\{ (x,y) : |x| + |y| = \frac{1}{n} \right\} .$$

Più esplicitamente,

$$A = \Big\{(x,y) : |x|+|y| = 1\Big\} \cup \Big\{(x,y) : |x|+|y| = \frac{1}{2}\Big\} \cup \Big\{(x,y) : |x|+|y| = \frac{1}{3}\Big\} \cup \ldots$$

Si determinino l'interno e la chiusura di A.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+4} \right)^{3x} , \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tanh(x^4)\ln(y^2+1)}{\sin^2(x^4+y^2)} .$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{2-\ln x}{\ln x} .$$

4. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado 3 e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = \cos^2(x) ,$$

nel punto $x_0 = 5\pi$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 25.09.2014

1. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\} .$$

Si determini l'interno e la chiusura di A.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+1} - e^{x-1}}{x} , \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sinh(\sin x)(\cos y - 1)}{\ln(1 + x^2 + y^4)} .$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} .$$

4. Scrivere la formula di Taylor con polinomio di grado 4 e resto di Lagrange associata alla funzione

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + \cos x$$

nel punto $x_0 = 0$.