PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 30.01.2015

FILA A

1. Dimostrare che l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$$

è chiuso nello spazio metrico $\mathbb{R}^3$, dotato della distanza euclidea.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x^2) - x^2}{\cos(x^3) - 1}, \qquad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\tanh(3x^2(e^y - 1))}{\exp(\sin(x^2 y)) - 1}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x}{e^x - 1}.$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3, per la funzione

$$f(x) = \cos(x^2),$$

nel punto $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 18.02.2015

FILA A

1. Dimostrare che l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2\}$$

è chiuso nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$, dotato della distanza euclidea.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 0\,.$$

Si dimostri che esiste un $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $f'(\xi) = 1$.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \Big|1 - \Big|1 - |1 - x|\Big|\Big|\,.$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor di grado n (con $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi), per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}\,,$$

nel punto $x_0 = 0$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 10.06.2015

1. Siano $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Dimostrare che gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} : f_1(x) = f_2(x)\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R} : f_1(x) = -f_2(x)\}$$

sono entrambi chiusi (è sottinteso che su $\mathbb{R}$ sia definita la normale distanza euclidea.)

2. Si dimostri che, se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile, convessa, tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 1\,,$$

allora anche

$$\lim_{x\to+\infty} h'(x) = 1\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(e^x - 1)^2}\,.$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 con resto di Lagrange, associato alla funzione $f(x)$ dell'esercizio 3, nel punto $x_0 = \ln 2$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 01.07.2015

1. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è chiuso nello spazio metrico $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri razionali, dotato della distanza euclidea

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| .$$

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x - x^2/2)^4}{(\tanh(x^4))^3}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^x - 1)y^2}{\sqrt{1 - \cos(x^2 + y^4)}} .$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{e^x - 1} .$$

4. Scrivere la formula di Taylor con polinomio di grado n e resto di Lagrange, per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$, associata alla funzione

$$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1 ,$$

nel punto $x_0 = -\sqrt{\pi}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 02.09.2015

1. Dimostrare che l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\,,\ x + 2y \neq 1\}$$

non è né aperto né chiuso nello spazio metrico $\mathbb{R}^2$ dotato della distanza euclidea.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(\sin x + 3)^2}{\sqrt{2x-1}}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{[2(\cos x - 1) + x^2]\sin y}{\tan(x^4 y)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x+3}}{x+2}\,.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte, tale che

$$f''(0) = 1\,, \quad f'''(0) = 0\,,$$

e inoltre

$$f''''(x) \geq 0\,, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrare che f è convessa.

(Suggerimento: studiare la funzione derivata seconda $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 16.09.2015

1. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \Big\{ \Big((\pi + \arctan\theta)\cos\theta\,,\ (\pi + \arctan\theta)\sin\theta \Big) : \theta \in \mathbb{R} \Big\}\,.$$

Dopo averne disegnato la forma approssimativa, si determini l'interno e la chiusura di A.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - x}{\sin x + 2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4-3x^2)(y^2+5y)}{\tanh(x^4+y^2)}\,.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x|+1}+1}{e^{|x|-1}-1}\,.$$

4. Sia $n \geq 1$ un intero qualsiasi. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado n e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = x^n\,,$$

nel punto $x_0 = \pi + \sqrt{2}$, giustificando la conclusione.