Svolgimento prima provetta Analisi 1

16 Novembre 2016

Esercizio 1

Dimostrare per induzione che, per ogni numero intero $n \geq 1$, vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k = 2 + 2^{n+1}(n-1)$$

Svolgimento. Procediamo per induzione. Il caso base $n = 1$ è vero in quanto

$$2^1 \cdot 1 = 2 = 2 + 2^1 \cdot 0$$

Supponiamo ora che la proprietà in questione sia vera per un certo $n \geq 1$, mostriamo che deve valere anche nel caso $n + 1$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k k + 2^{n+1}(n+1) \\ &= 2 + 2^{n+1}(n-1) + 2^{n+1}(n+1) = \\ &= 2 + 2^{n+2}n\end{aligned}$$

che è esattamente la proprietà nel caso $n + 1$. □

Esercizio 2

Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \sin(x)\tanh(x)$$

Si stabilisca se l'insieme immagine

$$\mathcal{I} = \{F(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

è limitato superiormente e inferiormente, e si determinino $\sup \mathcal{I}$ e $\inf \mathcal{I}$.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che, per le note proprietà di limitatezza di sin e tanh,

$$|F(x)| = |\sin(x)|\,|\tanh(x)| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

e dunque -1 e 1 forniscono rispettivamente una limitazione inferiore e superiore di $\mathcal{I}$. Dimostreremo ora che si ha inoltre $\inf \mathcal{I} = -1$ e $\sup \mathcal{I} = 1$.

Avendo già verificato che -1 e 1 sono limitazioni, ci basta dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due punti x_ε^- e x_ε^+ tali che $F(x_\varepsilon^-) < -1+\varepsilon$ e $F(x_\varepsilon^-) > 1-\varepsilon$.

Ricordiamo che $\tanh x$ è una funzione crescente, avente come immagine l'intervallo $]-1,1[$. Combinando queste proprietà, ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R_\varepsilon > 0$ tale che

$$\tanh x > 1-\varepsilon \qquad\qquad \text{per ogni } x > R_\varepsilon$$

Prendiamo dunque $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande da soddisfare che $2n_\varepsilon\pi > R_\varepsilon$ e definiamo

$$x_\varepsilon^- = \left(2n_\varepsilon + \frac{3}{2}\right)\pi \qquad\qquad x_\varepsilon^+ = \left(2n_\varepsilon + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Ne segue che

$$F(x_\varepsilon^-) = -\tanh x_\varepsilon^- < -1+\varepsilon \qquad\qquad F(x_\varepsilon^+) = \tanh x_\varepsilon^+ > 1-\varepsilon$$

provando la proprietà desiderata. □

Esercizio 3

Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ così definito:

$$A = \Big\{(x,y) : 0 < |x-1| + |y-1| \le 1\Big\}$$

Si determinino l'interno e la chiusura di A, giustificando le conclusioni.

Svolgimento. Introduciamo la funzione continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = |x-1| + |y-1|$$

ed i due insiemi

$$E = \Big\{(x,y) : 0 < f(x,y) < 1\Big\} \qquad\qquad F = \Big\{(x,y) : 0 \le f(x,y) \le 1\Big\}.$$

Affermiamo che E ed F sono rispettivamente l'interno e la chiusura di A.

Innanzitutto mostriamo che $E \subseteq \mathring{A}$. Osserviamo che $E = f^{-1}(]0,1[)$; essendo f continua, ne segue che E è aperto. Siccome $E \subset A$ e l'interno $\mathring{A}$ è il più grande aperto contenuto in A, ne deduciamo l'inclusione $E \subseteq \mathring{A}$.

A questo punto, per verificare che $E = \mathring{A}$, ci resta da dimostrare che nessun elemento di $A \setminus E$ è un punto interno di A. Sia dunque (x_0,y_0) tale che $f(x_0,y_0) = 1$; ci basta trovare, per ogni $\rho > 0$, un punto (x_ρ,y_ρ), tale che $f(x_\rho,y_\rho) > 1$ e $\|(x_\rho,y_\rho) - (x_0,y_0)\| < \rho$. Scegliamo dunque

$$(x_\rho,y_\rho) = \left(x_0 + \operatorname{sgn}(x_0-1)\,\frac{\rho}{2}\,,\; y_0 + \operatorname{sgn}(y_0-1)\,\frac{\rho}{2}\right)$$

Osserviamo che $1 < f(x_\rho,y_\rho) \le 1+\rho$ e $\|(x_\rho,y_\rho) - (x_0,y_0)\| \le \frac{\rho}{\sqrt{2}}$, soddisfacendo così le condizioni richieste.

Mostriamo ora che $F \subseteq \overline{A}$. Siccome $A \subseteq \overline{A}$, ci basta verificare che il punto $(1,1)$ sia aderente ad A. Osserviamo perciò che, per ogni $0 < \delta < 1$, definendo $(x_\delta, y_\delta) = \left(1 + \frac{\delta}{2}, 1 + \frac{\delta}{2}\right)$, abbiamo che $\|(1,1) - (x_\delta, y_\delta)\| = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ e $f(x_\delta, y_\delta) = \delta$, dunque $(x_\delta, y_\delta) \in A$. Ne segue che $(1,1)$ è aderente ad A.

Essendo f continua e $F = f^{-1}([0,1])$, ne segue che F è chiuso. Siccome $A \subset F \subseteq \overline{A}$ e la chiusura $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente A, ne segue necessariamente che $F = \overline{A}$.

□

Esercizio 4

Dire se la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua.

Svolgimento. La funzione è continua su tutto il suo dominio.

Osserviamo innanzitutto che in ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ la funzione f è continua in quanto ottenuta tramite proiezione, somma, prodotto e composizione di funzioni continue, con le funzioni $1/t$ e $\sqrt{t}$ applicate solo a valori positivi.

Ci rimane da dimostrare che la funzione è continua in $(0,0)$, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x,y)| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathcal{B}((0,0),\delta)$$

Siccome

$$|f(x,y)| \leq (x^2+y^2)\cdot 1 = \|(x,y)\|^2$$

osserviamo che è sufficiente prendere un qualsiasi $\delta \in]0, \sqrt{\varepsilon}[$ per soddisfare la proprietà cercata.[1]

□

[1] Un modo alternativo di mostrare la continuità in $(0,0)$ è applicare il Teorema dei due carabinieri, confrontando f con le funzioni $\pm\|(x,y)\|^2$.