SECONDO TEST DI ANALISI 1
per i CdL in FISICA e MATEMATICA, a.a. 2016/17
assegnato in data 15.12.2016

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \left(\sqrt[4]{x^2+y^2}\,\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right),\ 1+\arctan(x-y)\,,\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right).$$

Si calcoli il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

Soluzione. Dobbiamo studiare separatamente i limiti delle tre componenti. Vediamo il primo: osservando che

$$-\sqrt[4]{x^2+y^2} \le \sqrt[4]{x^2+y^2}\,\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \le \sqrt[4]{x^2+y^2}\,,$$

siccome

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[4]{x^2+y^2} = 0\,,$$

per il teorema dei due carabinieri concludiamo che il primo limite è uguale a 0. Il secondo vale 1, per continuità, e il terzo è uguale a 0 (visto a lezione). Quindi,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,1,0)\,.$$

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sin(x^2-1)}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3^x-1)\log_2(y+1)}{\tanh(x^2+y^2)}\,.$$

Soluzione. Vediamo il primo: dopo aver osservato che 1 è di accumulazione per il dominio della funzione, procedo con un cambio di variabile e uso le proprietà dei limiti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sin(x^2-1)} &= \lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+1)}{\sin((u+1)^2-1)} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+1)}{u}\ \frac{u^2+2u}{\sin(u^2+2u)}\ \frac{u}{u^2+2u} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\ln(u+1)}{u}\ \lim_{u\to 0} \frac{u^2+2u}{\sin(u^2+2u)}\ \lim_{u\to 0} \frac{1}{u+2} \\
&= 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato i limiti notevoli

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u}=1\,,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\,.$$

Vediamo ora il secondo: il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, e il punto $(0,0)$ ne è di accumulazione. Osservo che lungo le restrizioni

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:x=0\}\,,\qquad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:y=0\}$$

(per le quali $(0,0)$ è di accumulazione) la funzione è identicamente nulla. Pertanto, il limite su queste due restrizioni è uguale a 0. Di conseguenza, se il limite cercato esiste, esso deve essere 0. Studiamo ora l'andamento della funzione sull'insieme complementare

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:x\neq 0 \text{ e } y\neq 0\}\,.$$

Su questo insieme si ha

$$\begin{aligned}\frac{(3^x-1)\log_2(y+1)}{\tanh(x^2+y^2)}&=\frac{(e^{x\ln 3}-1)\frac{\ln(y+1)}{\ln 2}}{\tanh(x^2+y^2)}\\&=\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\,\frac{\ln 3}{\ln 2}\,\frac{\ln(y+1)}{y}\,\frac{x^2+y^2}{\tanh(x^2+y^2)}\,\frac{xy}{x^2+y^2}\,.\end{aligned}$$

Ricordiamo i limiti notevoli

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(y+1)}{y}=1\,,\quad \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1\,,\quad \lim_{w\to 0}\frac{\tanh w}{w}=1\,,$$

e che il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste (visto a lezione). Concludiamo che il limite cercato non esiste.

Si poteva giungere alla stessa conclusione considerando la restrizione all'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}:x=y\}\,,$$

per la quale $(0,0)$ è di accumulazione. Su di essa abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)\log_2(x+1)}{\tanh(x^2+x^2)}&=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x\ln 3}-1)\frac{\ln(x+1)}{\ln 2}}{\tanh(2x^2)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\ln 3}\,\frac{\ln 3}{\ln 2}\,\frac{\ln(x+1)}{x}\,\frac{2x^2}{\tanh(2x^2)}\,\frac{1}{2}\\&=1\cdot\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\ln 3}{2\,\ln 2}\,.\end{aligned}$$

Avendo trovato due restrizioni con limiti diversi, concludiamo che il limite cercato non esiste.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1\,, \quad f(0) = \pi\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,,$$

Dimostrare che c'è almeno un punto in cui la derivata seconda di f si annulla. Domanda: può essercene uno solo?

Soluzione. Ne vedremo quattro.

I) Supponiamo per assurdo che sia $f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per Darboux, abbiamo due casi:

a) $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

b) $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Nel caso a), la funzione f sarebbe strettamente convessa. Inoltre, esiste certamente un $\alpha < 0$ in cui $f(\alpha) < f(0)$. Ne segue che[1] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, una contraddizione.

Nel caso b) la funzione f sarebbe strettamente concava. Inoltre, esiste certamente un $\beta > 0$ in cui $f(\beta) < f(0)$. Ne segue che[2] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, una contraddizione.

Questa analisi mostra che deve esistere almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla, ma non dice nulla sull'eventuale esistenza di un secondo punto.

II) La funzione deve avere un massimo. Infatti, presi $a < 0 < b$ tali che

$$f(x) < \pi \ \text{ per ogni } x \le a\,, \qquad f(x) < \pi \ \text{ per ogni } x \ge b\,,$$

il teorema di Weiestrass per la restrizione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mi garantisce l'esistenza di un punto di massimo x_M di f su $[a, b]$, che necessariamente deve essere un punto di massimo su tutto $\mathbb{R}$. Si ha che $f(x_M) \ge \pi$ e, per Fermat, $f'(x_M) = 0$.

Vediamo cosa succede a destra di x_M. Può essere che $f''(x) \neq 0$ per ogni $x > x_M$? Se così fosse, per Darboux avremmo due casi:

a) $f''(x) > 0$ per ogni $x > x_M$;

b) $f''(x) < 0$ per ogni $x > x_M$.

[1] Se una funzione è convessa ed esistono $\alpha < \beta$ in cui $f(\alpha) < f(\beta)$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Infatti, preso $x > \beta$, usando la definizione di convessità si ha che

$$f(x) \ge f(\beta) + (x - \beta)\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\,,$$

e ne segue la conclusione.

[2] Analogamente a quanto visto nella nota precedente, se una funzione è concava ed esistono $\alpha < \beta$ in cui $f(\alpha) > f(\beta)$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.$$

Nel caso a), la funzione f sarebbe strettamente convessa su $[x_M, +\infty[$. Siccome f non può essere crescente su $[x_M, +\infty[$, esiste un punto $\tilde{x} > x_M$ in cui $f'(\tilde{x}) < 0$. Ma allora, essendo f' strettamente crescente su $[x_M, +\infty[$, dovrebbe essere $f'(x_M) < f'(\tilde{x}) < 0$, una contraddizione.

Nel caso b), la funzione f sarebbe strettamente concava su $[x_M, +\infty[$. Inoltre, esiste certamente un $\beta > x_M$ in cui $f(\beta) < f(x_M)$. Ne segue che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (vedi nota 2), una contraddizione.

Concludiamo quindi che esiste un punto a destra di x_M in cui la derivata seconda si annulla.

Un discorso analogo si può fare a sinistra di x_M, per cui si trova un secondo punto in cui la derivata seconda si annulla.

III) La funzione deve avere un massimo (vedi inizio della II soluzione). Sia x_M un punto di massimo, per cui $f(x_M) \geq \pi$ e $f'(x_M) = 0$.

Il teorema degli zeri garantisce l'esistenza di un $c_1 < x_M$ e di un $c_2 > x_M$ in cui $f(c_1) = \frac{\pi}{2}$ e $f(c_2) = \frac{\pi}{2}$. Consideriamo la pendenza (negativa) $\alpha = (f(c_2) - f(x_M))/(c_2 - x_M)$ e scegliamo una pendenza $m \in]\alpha, 0[$. La retta di equazione $y = m(x - x_M) + f(x_M)$ deve intersecare il grafico di f almeno due volte: infatti, il grafico della funzione si mantiene sopra la retta in un intorno destro di x_M (in quanto, in un intorno di x_M, si deve avere

$$\frac{f(x) - f(x_M)}{x - x_M} > m\,,$$

e quindi $f(x) > m(x - x_M) + f(x_M)$), poi sta sotto la retta nel punto c_2 e infine torna sopra la retta in un intorno di $+\infty$. Esistono quindi $d_1 < d_2$ in $]x_M, +\infty[$ in cui $f(d_1) = m(d_1 - x_M) + f(x_M)$ e $f(d_2) = m(d_2 - x_M) + f(x_M)$. Per Lagrange, esistono due punti $\xi_1 \in]x_M, d_1[$ e $\xi_2 \in]d_1, d_2[$ in cui $f'(\xi_1) = m = f'(\xi_2)$. Per Rolle, esiste un $\xi \in]\xi_1, \xi_2[$ in cui $f''(\xi) = 0$.

Un analogo discorso può ora essere fatto a sinistra di x_M, per cui si trova un secondo punto in cui la derivata seconda si annulla.

IV) La funzione f non può essere decrescente su $]-\infty, 0]$, per cui esiste un $x_1 < 0$ in cui $f'(x_1) > 0$. Analogamente, f non può essere crescente su $[0, +\infty[$, per cui esiste un $x_2 > 0$ in cui $f'(x_2) < 0$.

Prendendo un $x_1' < x_1$, per Lagrange esiste un $\xi_1 \in]x_1', x_1[$ tale che

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(x_1')}{x_1 - x_1'}\,,$$

e se prendiamo $x_1 - x_1'$ molto grande (usando l'informazione sul limite a $-\infty$) avremo che $f'(\xi_1) < f'(x_1)$. Analogamente, prendendo un $x_2' > x_2$, per Lagrange esiste un $\xi_2 \in]x_2, x_2'[$ tale che

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2') - f(x_2)}{x_2' - x_2}\,,$$

e se prendiamo $x_2' - x_2$ molto grande (usando l'informazione sul limite a $+\infty$) avremo che $f'(\xi_2) > f'(x_2)$.

La funzione f' non può essere decrescente su $[\xi_1, x_1]$, per cui esiste un $\alpha \in]\xi_1, x_1[$ in cui $f''(\alpha) > 0$. Inoltre, f' non può essere crescente su $[x_1, x_2]$, per cui esiste un $\beta \in]x_1, x_2[$ in cui $f''(\beta) < 0$. Infine, f' non può essere decrescente su $[x_2, \xi_2]$, per cui esiste un $\gamma \in]x_2, \xi_2[$ in cui $f''(\gamma) > 0$.

Per Darboux, esistono un $c_1 \in]\alpha, \beta[$ e un $c_2 \in]\beta, \gamma[$ in cui $f''(c_1) = 0 = f''(c_2)$.

4. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}\,.$$

<u>Soluzione</u>. L'espressione ha significato se e solo se $x \neq -2$ e $x \neq 2$, per cui studieremo la funzione sul dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Iniziamo ad esempio col calcolare alcuni limiti:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$
Osserviamo che $f(0) = \frac{1}{4}$ e
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1\,.$$
Calcoliamo ora la derivata:
$$f'(x) = -\frac{x^2-2x+4}{(x^2-4)^2}\,.$$
Vediamo che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. La funzione è pertanto strettamente decrescente sugli intervalli $]-\infty, -2[\,$, $]-2, 2[\,$, e $]2, +\infty[\,$.

Calcoliamo la derivata seconda:
$$f''(x) = 2\,\frac{x^3-3x^2+12x-4}{(x^2-4)^3}\,.$$
Non è immediato capire quale ne sia il segno.[3] Per avere qualche informazione aggiuntiva, studieremo separatamente la funzione
$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 4\,.$$
Si ha che
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,.$$

[3] Si potrebbe dimostrare che c'è un unico punto in cui il numeratore si annulla, e cioè $\bar{x} = 1 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$ (il cui valore è circa $0,36$).

La sua derivata è
$$g'(x) = 3(x^2 - 2x + 4)\,,$$
e vediamo che è sempre positiva. Pertanto, esiste un unico punto $\bar{x}$ in cui la funzione g si annulla. Cerchiamo di stimarlo: vedo che
$$g(0) = -4 < 0\,, \qquad g(1) = 6 > 0\,,$$
per cui sicuramente $\bar{x} \in]0,1[$. Possiamo essere più precisi:
$$g\Big(\frac{3}{10}\Big) = -0,643 < 0\,, \qquad g\Big(\frac{4}{10}\Big) = 0,384 > 0\,,$$
per cui $\bar{x} \in]\frac{3}{10}, \frac{4}{10}[$. Sappiamo quindi che
$$g(x) < 0 \text{ se } x < \bar{x}\,, \quad g(x) > 0 \text{ se } x > \bar{x}\,.$$
Tenendo conto che
$$(x^2-4)^3 < 0 \text{ se } -x \in]-2,2[\,, \quad (x^2-4)^3 > 0 \text{ se } x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\,,$$
possiamo dedurne che
$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in]-\infty,-2[\,, \quad f''(x) > 0 \text{ se } x \in]-2,\bar{x}[\,,$$
$$f''(x) < 0 \text{ se } x \in]\bar{x},2[\,, \quad f''(x) > 0 \text{ se } x \in]2,+\infty[\,.$$
Questa informazione ci dice dove la funzione è strettamente concava e dove è strettamente convessa. Possiamo così tracciarne un grafico approssimativo.