**Base di Gröbner di un modulo/ideale graduato su $\mathbb{Z}$**

Sui termini dell'anello $P = \mathbb{Q}[x, y, z]$ fissiamo l'ordinamento `DegRevLex` in cui $x > y > z$, quindi dato da: $x^h y^i z^j >_{\text{DegRevLex}} x^k y^l z^m$ se $h+i+j > k+l+m$ o, se $h + i + j = k + l + m$, allora $j < m$ o, se anche $j = m$, allora $i < l$. Su $P$ fissiamo la gradazione data da $W = (1, 1, 1)$, cioè $\deg(x^h y^i z^j) = h \cdot 1 + i \cdot 1 + j \cdot 1$. Sia $I = (x^2 - z^2, y^2 z - xz^2, x^3) \subseteq P^1 = P$. $I$ è un $P$-modulo (anzi, un ideale) generato da elementi omogenei, quindi è un modulo (ideale) graduato, di gradi rispettivi $\deg_W(h_1) = 2, \deg_W(h_2) = 3, \deg_W(h_3) = 3$. Posto $h_1 = x^2 - z^2$, $h_2 = y^2 z - xz^2$, $h_3 = x^3$, calcoliamo la base di Gröbner di $h_1, h_2, h_3$ usando l'algoritmo di Buchberger:

- $S(h_1, h_2) = y^2 z h_1 - x^2 h_2 = -y^4 z + x^3 z^2$. Si noti che, essendo $h_1$ e $h_2$ omogenei, $y^2 z h_1$ e $x^2 h_2$ sono anche omogenei e inoltre sono dello stesso grado, in quanto hanno un monomio in comune. Pertanto $S(h_1, h_2)$ è omogeneo. $S(h_1, h_2)$ si può ridurre con $\{h_1, h_2, h_3\}$ e si ottiene:

  $$x^3z^2 - y^2z^3 \to x^3z^2 - y^2z^3 - xz^2h_1 = -y^2z^3 + xz^4 \to -y^2z^3 + xz^4 + z^2h_2 = 0$$

  Si noti che, per lo stesso motivo spiegato sopra, tutti gli elementi ottenuti nei singoli passi della riduzione sono necessariamente omogenei.
- $S(h_1, h_3) = xh_1 - 1h_3 = -xz^2 = h_4$.
- $S(h_1, h_4) = z^2 h_1 + xh_4 = -z^4 = h_5$
- Tutti gli altri $S$-vettori si riducono a zero.

Pertanto una base di Gröbner di $I$ è:

$$h_1 = x^2 - z^2, \quad h_2 = y^2 z - xz^2, \quad h_3 = x^3, \quad h_4 = -xz^2, \quad h_5 = -z^4$$

È necessariamente fatta da elementi omogenei. La base di Gröbner ridotta è data da:

$$x^2 - z^2, \quad xz^2, \quad y^2 z, \quad z^4$$

Anch'essa fatta da elementi necessariamente omogenei.

**Risoluzione libera (minimale)**

Consideriamo l'usuale mappa: $\phi_0 : P^3 \longrightarrow P$ data da: $\phi_0(e_i) = h_i$ ($i = 1, \ldots, 3$). Per far diventare $\phi_0$ omomorfismo di moduli graduati su $\mathbb{Z}$, dobbiamo definire una graduazione su $P^3$ in modo che $\deg_W(e_1) = \deg_W(h_1) = 2$, $\deg_W(e_2) = 3$, $\deg_W(e_3) = 3$. Siamo quindi forzati a definire la seguente graduazione su $P^3$:

$$(P^3)_d = \{f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 \mid f_i \text{ omogeneo}, \ \deg_W(f_i) + \deg_W(e_i) = d\}$$

Questo comporta che $f_1$ deve essere un polinomio omogeneo di grado $d - 2$, $f_2$ e $f_3$ devono essere polinomi omogenei di grado $d - 3$. Allora $f_1 \in P(-2)_d$ e $f_2, f_3 \in P(-3)_d$. Quindi $P^3$ viene così graduato:

$$F_0 = P(-2) \oplus P(-3) \oplus P(-3) = P(-2) \oplus P(-3)^2$$

Il nucleo della mappa $\phi_0$ è un sottomodulo graduato di $F_0$ e si può vedere che è generato da:

$$g_1 = (x^3, 0, -x^2 + z^2), \qquad g_2 = (xy^2 - x^2 z, xz, -y^2 + xz),$$
$$g_3 = (y^2 z - xz^2, -x^2 + z^2, 0), \quad g_4 = (x^2 y^2 + y^2 z^2 - xz^3, z^3, -xy^2 + z^3)$$

Si noti che $g_1, \dots, g_4$ sono omogenei: ad esempio vediamo che $g_2$ è omogeneo: la prima componente di $g_2$ è $xy^2 - x^2z$, è un polinomio omogeneo nella gradazione data da $W$ e $\deg_W(xy^2 - x^2z) = 3$, quindi $xy^2 - x^2z \in P_3 = P(-2)_5$. La seconda componente di $g_2$ è $xz$, polinomio omogeneo, $\deg_W(xz) = 2$ e $xz \in P_2 = P(-3)_5$, analogamente la terza componente di $g_2$ vale $-y^2 + xz$, polinomio omogeneo di grado 2 e anche esso sta in $P_2 = P(-3)_5$, pertanto $g_2 \in \left(P(-2) \oplus P(-3)^2\right)_5$. In questo modo si vede che tutti i $g_i$ sono omogenei e vale: $\deg_W(g_1) = 5$, $\deg_W(g_2) = 5$, $\deg_W(g_3) = 5$ e $\deg_W(g_4) = 6$.

Passiamo al calcolo delle sizigie di $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_4)$, cioè al nucleo della mappa $\phi_1 : P^4 \longrightarrow P^3$ dato da $\phi_1(\varepsilon_j) = g_j$ (dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ è la base canonica di $P^4$). L'omomorfismo $\phi_1$ può essere reso graduato su $\mathbb{Z}$, definendo su $P^4$ una graduazione tale che ad $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ è assegnato grado 5 (i gradi di $g_1, g_2$ e $g_3$), mentre ad $\varepsilon_4$ è assegnato grado 6 (il grado di $g_4$). Pertanto $\phi_1$ diventa:

$$\phi_1 : P(-5)^3 \oplus P(-6) \longrightarrow P(-2) \oplus P(-3)^2$$

e quindi abbiamo finora costruito la seguente sequenza esatta di $P$-moduli graduati su $\mathbb{Z}$:

$$P(-5)^3 \oplus P(-6) \xrightarrow{\phi_1} P(-2) \oplus P(-3)^2 \xrightarrow{\phi_0} I \longrightarrow 0$$

In particolare $\phi_1$ dà una presentazione finita di $I$. $\phi_1$ è rappresentata dalla seguente matrice $A = (a_{ij})$ (dove $\phi_1(\varepsilon_j) = \sum a_{ij} e_i$)

$$A = \begin{pmatrix} x^3 & xy^2 - x^2z & y^2z - xz^2 & x^2y^2 + y^2z^2 - xz^3 \\ 0 & xz & -x^2 + z^2 & z^3 \\ -x^2 + z^2 & -y^2 + xz & 0 & -xy^2 + z^3 \end{pmatrix}$$

(quindi le colonne di $A$ sono i vettori $g_1, \dots, g_4$). Scrivendo sotto alle colonne della matrice $A$ gli shift del dominio di $\phi_1$ e a sinistra delle righe di $A$ gli shift del codominio di $\phi_1$, otteniamo la seguente tabella:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $x^3$ | $xy^2 - x^2z$ | $y^2z - xz^2$ | $x^2y^2 + y^2z^2 - xz^3$ |
| 3 | $0$ | $xz$ | $-x^2 + z^2$ | $z^3$ |
| 3 | $-x^2 + z^2$ | $-y^2 + xz$ | $0$ | $-xy^2 + z^3$ |
| | 5 | 5 | 5 | 6 |

che evidenzia la proprietà seguente: il grado $\deg_W(a_{ij})$ di ogni entrata $a_{ij}$ della matrice $A$ è uguale alla differenza tra il grado della colonna $j$ e il grado della riga $i$. Una matrice con questa proprietà si dice matrice omogenea o graduata.

Possiamo proseguire nel calcolo delle sizigie: Il nucleo di $\phi_1$ si può vedere che è genato da:

$$m_1 = (z, x, z, -1), \quad m_2 = (y^2 - xz, -x^2 + z^2, -xz, 0)$$

$m_1$ e $m_2$ sono elementi omogenei di $P(-5)^3 \oplus P(-6)$ e vale $\deg_W(m_1) = 6$ e $\deg_W(m_2) = 7$. Quindi la risoluzione prosegue con:

$$\phi_2 : P(-6) \oplus P(-7) \longrightarrow P(-5)^3 \oplus P(-6)$$

La matrice che rappresenta $\phi_2$ è:

$$\begin{pmatrix} z & y^2 - xz \\ x & -x^2 + z^2 \\ z & -x^2 + z^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice è graduata, in accordo con la seguente tabella (dove la prima colonna rappresenta nuovamente gli shift del codominio, mentre l'ultima riga rappresenta gli shift del dominio):

$$\begin{array}{c|cc} 5 & z & y^2 - xz \\ 5 & x & -x^2 + z^2 \\ 5 & z & -x^2 + z^2 \\ 6 & -1 & 0 \\ \hline & 6 & 7 \end{array}$$

Si può vedere che $\ker(\phi_2) = 0$, quindi in particolare abbiamo ottenuto la seguente risoluzione libera graduata su $\mathbb{Z}$ dell'ideale $I$:

$$0 \to P(-6) \oplus P(-7) \xrightarrow{\phi_2} P(-5)^3 \oplus P(-6) \xrightarrow{\phi_1} P(-2) \oplus P(-3)^2 \xrightarrow{\phi_0} I \to 0$$

La risoluzione libera trovata non è una risoluzione libera minimale di $I$. Ci si accorge di ciò dal fatto che la sizigia $m_1$ contiene una costante nella quarta coordinata, questo significa $g_4$ può essere scritto come combinazione lineare di $g_1, \ldots, g_3$ (infatti $m_1$ stabilisce che $zg_1 + xg_2 + zg_3 = g_4$). Una risoluzione libera minimale di $I$ è la seguente:

$$0 \longrightarrow P(-7) \xrightarrow{\beta} P(-5)^3 \xrightarrow{\alpha} P(-2) \oplus P(-3)^2 \xrightarrow{\phi_0} I \to 0$$

dove:

$$\alpha = \begin{pmatrix} xz^2 & 0 & y^2 z \\ -x^2 + z^2 & y^2 & 0 \\ 0 & -xz & -x^2 + z^2 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 - z^2 \\ -xz \end{pmatrix}.$$